

Prueba Control 6 Álgebra

i) Neutro para \odot

$u \in \mathbb{Z}$ es neutro para \odot si $\forall a \in \mathbb{Z}, a \odot u = u \odot a = a$

0.5

Entonces $a \odot u = a \Rightarrow a + u + a \cdot u = a \Rightarrow u(1+a) = 0$

Como esto debe cumplirse $\forall a \in \mathbb{Z}$, $u = 0$ que al verificar

0.5

por la izquierda $0 \odot a = 0 + a + 0 \cdot a = a$ cumple.

ii) Si existe un isomorfismo f entre las estructuras $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$, entonces la imagen del neutro multiplicativo en $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, que es el 1, debe ser el neutro multiplicativo en $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$

0.5

Así, $f(1) = u = 0$ (encontrado en i).

Además, usando la indicación y el morfismo, se tiene.

$$\begin{aligned} f(n) &= f(\underbrace{1+1+\dots+1}_n) = \underbrace{f(1) \oplus f(1) \oplus \dots \oplus f(1)}_{n \text{ veces}} \\ &= \underbrace{0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0}_{n \text{ veces}} \end{aligned}$$

Sumando los dos primeros ceros se obtiene $0 \oplus 0 = 0 + 0 + 1 = 1$ y al sumar cada cero siguiente (asociatividad), la suma aumenta en 1

Así: $0 \oplus 0 = 1$; $0 \oplus 0 \oplus 0 = 2$; $0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 3$, de modo que

$$f(n) = \underbrace{0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0}_{n \text{ veces}} = n-1$$

0.5

Sigue que $f(n) = n-1$ debe ser el isomorfismo.

Verificación: Es inmediato que $f(n) = n-1$, $n \in \mathbb{Z}$ es biyectivo.

Inyectivo: $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 - 1 = n_2 - 1 \Rightarrow n_1 = n_2$

0.5

Sobreyectivo: $\forall m \in \mathbb{Z}$, tomamos $(m+1) \in \mathbb{Z}$ y así $f(m+1) = m+1-1 = m$

Morfismos: Sean $a, b \in \mathbb{Z}$

$$f(a) \oplus f(b) = (a-1) \oplus (b-1) = a-1+b-1+1 = a+b-1 = f(a+b) \text{ cumple.}$$

$$f(a) \odot f(b) = (a-1) \odot (b-1) = (a-1) + (b-1) + (a-1)(b-1) = ab-1 = f(ab) \text{ cumple.}$$

Primera Forma

- (2.0) Observar que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es anillo conmutativo con unidad, en consecuencia, por el isomorfismo anterior (punto (ii)), la transferencia de propiedades es completa, de lo que resulta que $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ es también anillo conmutativo con unidad, con $\text{cero} = f(0) = -1$ y $\text{unidad} = f(1) = 0$
- Segunda Forma (Demostrando cada propiedad)

- (1.0) (\mathbb{Z}, \oplus) es grupo abeliano
- \oplus es asociativo: $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ (solo es desarrollo)
 - \oplus es conmutativo: $a \oplus b = a + b + 1 = b \oplus a$
 - Neutro $a \oplus e = a \Rightarrow a + e + 1 = a \Rightarrow e = -1$ (cero en $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$)
 - Simétrico $a \oplus a' = e \Rightarrow a + a' + 1 = -1 \Rightarrow a' = -2 - a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$
- (1.0) \odot es asociativo: $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$ (se verifica desarrollando cada miembro)
- (1.0) \odot distribuye c/a \oplus : $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$ " " " "
- (1.0) Con lo anterior $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ es anillo.
- Además \odot conmuta: $a \odot b = a + b + a \cdot b = b \odot a$
y existe unidad, encontrado en (i): $u = 0 \in \mathbb{Z}$.
- Segue que $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ es anillo conmutativo con unidad.

IV) Primera forma (usando el isomorfismo)

- (1.0) El único elemento invertible en $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ distinto de la unidad es -1
- Según el morfismo, el único invertible en $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ distinto de su unidad ($u=0$) es la imagen de -1 , es decir $f(-1) = -1 - 1 = -2$

Segunda Forma (cálculo directo)

- (1.0) El inverso multiplicativo en $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ se determina por:
- Si $b' \in \mathbb{Z}$ es inverso de $b \in \mathbb{Z}$: $b \odot b' = u \Rightarrow b + b' + b \cdot b' = 0 \quad (u=0)$
 $\Rightarrow b' = -\frac{b}{1+b}$. Como $b' \in \mathbb{Z}$, el único b ($b \neq u=0$) tal que $-\frac{b}{1+b} \in \mathbb{Z}$
es $b = -2$